



بخش آموزش رسانه تفریحی سنتر

کلیک کنید  www.tafrihicenter.ir/edu

نمونه سوال  گام به گام

امتحان نهایی  جزوه

دانلود آزمون های آزمایشی 

متوسطه اول : هفتم ... هشتم ... نهم

متوسطه دوم : دهم ... یازدهم ... دوازدهم

www.tafrihicenter.ir

Subject:

Year:

Month:

Date:

هندسه: شافه ای از ریاضیات می باشد که پدیده های اطراف ما را شبیه سازی می کند.

و مفاهیم آن شهری و ملموس می باشد.

مفاهیم هندسه: ۱- تعاریف: مفاهیمی هستند که به وسیله ای اسمی مشخص می شوند.

و پذیرفتن آنها نیاز به دلیل ندارد. ۲- اصول: مفاهیمی هستند که پذیرفتن درستی

آنها نیاز به دلیل ندارد. (بدیهی). ۳- قضایا: مفاهیمی که می باشد که از استدلال

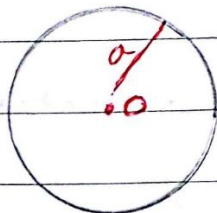
استنتاجی ثابت شده اند.

پاراکسوری: حالت هم نهستی دو مثلث. (ض ض ض) (ض ض ض) (ض ض ض)

(و ز) (و ض) مفهومی مثلث های قائم زاویه.

درس اول: ترسیم های هندسی و استدلال

۱- نقاطی را تأیید کنید که از نقطه ۰ به فاصله ۵ باشد.



تمامی نقاط روی دایره می باشد مرکز ۰ و شعاع قرار می گیرند.

ALYAZ

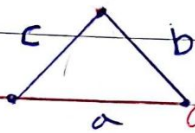
Subject:

Year:

Month:

Date:

۲. روش رسم یک مثلث با طول اضلاع a, b, c را توضیح دهید.



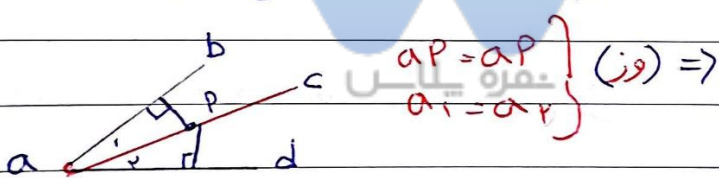
۵. برای کشیم در وسط دایره یک کمان از مرکز O به اندازه r و P می کشیم و بعد مثلث OPC را می کشیم.

۶. برخی خواص نیم ساز و تقسیم آن

نیم ساز یک زاویه θ یعنی خطی که از رأس زاویه رسم می شود و زاویه را به دو قسمت مساوی

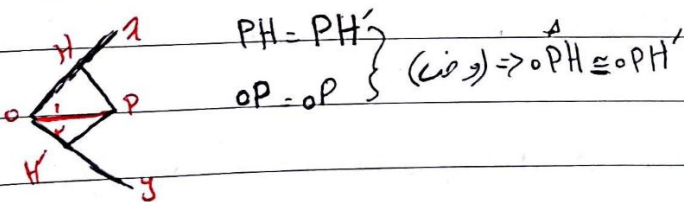
تقسیم می کند.

۱. ثابت کنید هر نقطه روی نیم ساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک اندازه است.



$$\Rightarrow (FZ) \left. \begin{array}{l} ap = ap \\ \alpha_1 = \alpha_2 \end{array} \right\}$$

۲. ثابت کنید نقطه ای که حاصل آن از دو ضلع زاویه به یک اندازه باشد روی نیم ساز زاویه



$$\left. \begin{array}{l} PH = PH' \\ OP = OP \end{array} \right\} \Rightarrow \angle PHO = \angle PH'O \Rightarrow (FZ)$$

قرار دارد.

عمود منصف EF به خطی که در وسط یک پاره خط بر آن عمود رسم می شود.

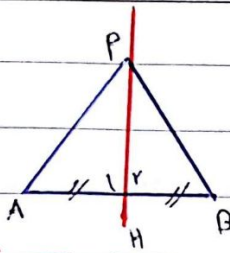
سوال ۳ ثابت کنید فاصله هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن به یک اندازه است.

Subject:

Year:

Month:

Date:



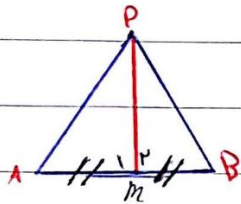
$$PH = PH$$

$$H_1 = H_2$$

$$AB = HB$$

$$\left. \begin{array}{l} PH = PH \\ H_1 = H_2 \\ AB = HB \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle PAH \cong \triangle PBH \text{ (ض ض ض)}$$

سوال ۸ ثابت کنید اگر دو نقطه از دو سر یک پاره خط به یک اندازه باشند آن نقطه روی



عمود منصف قرار دارد. از P به وسط AB وصل می کنیم.

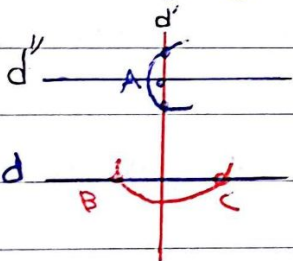
$$PA = PB$$

$$AM = BM$$

$$PM = PM$$

$$\left. \begin{array}{l} PA = PB \\ AM = BM \\ PM = PM \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle PAM \cong \triangle PMB \text{ (ض ض ض)}$$

روش رسم خط موازی با یک خط از نقطه ای خارج آن را قیاس دهید.

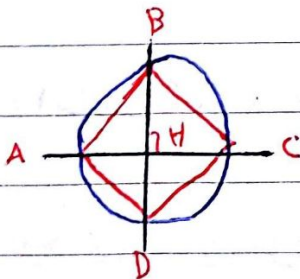


رسم ۸ از نقطه ای A خط d را عمود بر d رسم می کنیم

و سپس در نقطه d' بر d عمود رسم می کنیم و چون

دو خط d و d' هر دو بر d عمود هستند پس خودشان موازی اند.

روش رسم مربعی که یک قطر آن داده شده.



رسم ۹ قطر AC را رسم می کنیم سپس عمود منصف AC را

رسم می کنیم تا AC را در نقطه H قطع کند به مرکز H و شعاع AH

دایره ای رسم می کنیم و تقاطع دست آمده را به کمک منصف می کنیم.

ALYAZ

Subject:

Year:

Month:

Date:

فصل دوم

استدلال

روش های استدلال در هندسه: استقرائی - استنباطی - غیر مستقیم (برهان خلف)

استقرائی: نتیجه گیری کلی بر پایه ی مجموعه ای از مشاهدات و اندازه گیری کردن و تکرار یک

آزمایش را استدلال استقرائی گوئیم. باید به عبارت دیگر استقراد یعنی از جزء به کل رسیدن.

نتایجی که از این روش به دست می آید کامل قابل اعتماد نیست بلکه همراه با حدس و گمان

است.

مثال: نشان دهید مجموع زاویه های داخلی هر n ضلعی $180^\circ (n-2)$ است.

استدلال: می دانیم در n ضلعی های مربع مستطیل کائوزی و متوازی الاضلاع $n-2$ و

زاویه مجاور مکمل همدیگر اند و پس مجموع n زاویه آجانه 180° می شود. در نتیجه هر n ضلعی

مربع مجموع زاویه هایش $180^\circ (n-2)$ است.

توجه: استدلال به کار رفته در مثال بالا استدلال استقرائی است. چون از چند حالت خاص

یک نتیجه کلی گرفته ایم. (از جزء به کل رسیدن)

Subject:

Year:

Month:

Date:

استنتاجی: استدلال بر پایه حقایق که درستی آنها را قبول کرده ایم، (تعاریف و مفاهیمی که

در هم نهشتی هم استفاده می شود) نتایجی که از این استدلال به دست می آید کاملاً درست و

قابل اعتماد هستند.

قضیه: مفاهیم کلی هستند که از استدلال استنتاجی ثابت شده اند و از آنها در حل مسائل دیگر

استفاده می شوند.

قضیه شرطی: به قضیه ای که به صورت جمله شرطی بیان می شود قضیه شرطی می گویند. به جمله ای

که بعد از آن قرار می گیرد فرض و به جمله ای بعد از آن اشاره حکم گفته می شود. $P \Rightarrow Q$

عکس قضیه شرطی: اگر در یک قضیه شرطی جایی فرض و حکم را عوض کنیم به عبارت شرطی حاصل

عکس قضیه گفته می شود، ممکن است درست یا نادرست باشد.

مثال: قضیه در هر مثلث متساوی الساقین زاویه های روبرو به ساق ها مساوی اند

الف) به صورت شرطی بیان کنید. ب) عکس قضیه را بنویسید.

الف) اگر مثلث متساوی الساقین باشد آنگاه زاویه های روبروی ساق ها با هم برابرند.

Subject:

Year:

Month:

Date:

ب) اگر در مثلثی دو زاویه باهم برابر باشند آنگاه آن مثلث متساوی الساقین می باشد.

قضیه دوشطی: اگر عکس یک قضیه درست باشد به آن قضیه دوشطی می گویند.

به صورت $P \Rightarrow Q$ نام گذاری می شود.

مثال: قضیه فیثاغورس را به صورت یک قضیه دوشطی بیان کنید.

حل: قضیه دوشطی یک مثلث قائم الزامی است. اگر و تنها اگر توان دوم یک ضلع برابر مجموع

توان دوم های دو ضلع دیگر باشد.

رفت: اگر مثلث قائم الزامی باشد آنگاه توان دوم یک ضلع برابر مجموع توان دوم دو ضلع دیگر.

برگشت: اگر در یک مثلث توان یک ضلع برابر مجموع توان دوم های دو ضلع دیگر باشد آنگاه

آن مثلث قائم الزامی است.

نوبه: برای اثبات یک قضیه دوشطی هم رفت قضیه و هم برگشت آن را حساب کنیم.

خط ها: هر سه به خط که فقط در یک نقطه هم می افتند و آن نقطه

نقطه هم می افتن می شود.

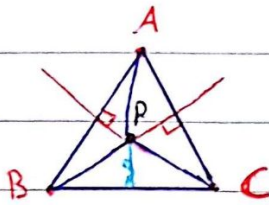
Subject:

Year:

Month:

Date:

قضیه ۱ در هر مثلث ممود منصف داخلی سه ضلع هم‌رس اند.
ممود منصف‌ها هم‌رس اند. حکم: $\triangle ABC$ یک مثلث است فرض



استدلال: ممود منصف‌های دو ضلع AB و AC را رسم می‌کنیم.

چون AB و AC تقاطع‌اند پس ممود منصف‌های آن‌ها هم در تقاطع می‌باشند و در P هم‌دگر را

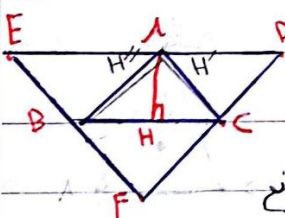
قطع می‌کنند. پس از P به C , A , B وصل می‌کنیم. P هم‌رس هستند.

قرار دارد یعنی سه ممود منصف در نقطه

P روی ممود منصف AB است پس $PA = PB$

$$PB = PC$$

P روی ممود منصف AC است پس $PA = PC$



قضیه ۲ سه ارتفاع هر مثلث هم‌رس اند. ارتفاع‌ها هم‌رس اند. حکم: $\triangle ABC$ مثلث است فرض

اثبات: از رأس‌های مثلث ABC سه خط موازی اضلاع ABC رسم می‌کنیم

اضلاع موازی
 $AD \parallel BC$ } $\Rightarrow BC = AD$
 $AB \parallel DC$ } $\Rightarrow ABCD$ چهارضیعی

موازی اضلاع
 $AE \parallel BC$ } $\Rightarrow BC = AE$
 $AC \parallel BE$ } $\Rightarrow AECB$ چهارضیعی

تقاطع DEF به وجود آید.

$$\Rightarrow AD = AE$$

از طرفی $EP \parallel BC$ است و AH ممود بر BC می‌باشد پس ED ممود است در ترتیب AH ممود منصف

ضلع ED می‌باشد. و به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد BH' ممود منصف EF و CH' ممود منصف

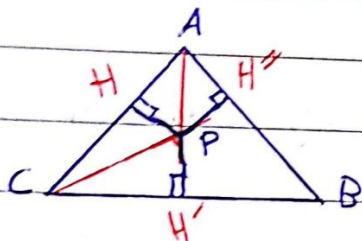
ALYAZ

Subject:

Year: _____ Month: _____ Date: _____

DF است یعنی ارتفاع های مثلث ABC روی عمود منتهای های مثلث DEF باشد چون

عمود منتهای ها هم بر این سه ارتفاع های ABC نیز می رسند



قضیه ۳) در هر مثلث سه نیم سازه های داخلی هم رسند

ABC مثلث است فرض

سه نیم سازه های داخلی هم رسند و مکمل

اثبات و نیم سازه در زاویه A و C را رسم می کنیم این دو نیم سازه در نقطه P هم می افتند و قطع می کنند

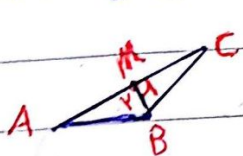
PH = PH'' (۱) روی نیم سازه A است

سبب از نقطه P به سه ضلع عمود می کنند

PH = PH' (۲) روی نیم سازه C است

در نتیجه سه نیم سازه در نقطه P هم رسند $\Rightarrow$ P روی نیم سازه B قرار دارد $\Rightarrow PH' = PH'' \Rightarrow ۱ و ۲$

قضیه ۴) اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشد آنگاه زاویه روبه روبه ضلع بزرگتر بزرگتر است از



$AC > BC$ فرض

$\hat{B} > \hat{A}$ و دکم

زاویه روبه روبه ضلع کوچکتر

اثبات و روی ضلع AC پاره خط CM را طوری جدا کنیم که $CM = CB$ باشد و سپس از M به B وصل می کنیم

$\hat{M}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow \triangle BMC$ متساوی الساقین $\Rightarrow CM = CB$

می دانیم در هر مثلث اندازه ی هر زاویه خارجی از هر کدام از زاویه های داخلی غیر مجاور بزرگتر است یعنی

$\hat{M}_1 > \hat{A} \Rightarrow \hat{B}_1 > \hat{A} \Rightarrow \hat{B} > \hat{A}$

$\hat{B} > \hat{B}_1$ چون B بیرونی از $\hat{B}_1$ است

ALYAZ

Subject:

Year:

Month:

Date:

گزاره 8 به هر صدی ضربی که دقیقاً درست یا نادرست باشد آن گزاره کوئیم. ممکن است ما از درست بودن یا نادرست بودن آن جمله اطلاع نداشته باشیم. مثال گزاره $7 > 3$

توجه! اگر یک گزاره از یک جمله ضربی درست باشد باید به آن گزاره ساده کوئیم و اگر ترکیبی از مرکب به $\vee$ عددی اول و از $\wedge$ جزئی است. چند گزاره ساده باشد به آن گزاره مرکب کوئیم. مثال 8: 5 عددی زوج است.

نقیض یک گزاره به عبارتی که ارزش آن در حقیقتاً خلاف ارزش یک گزاره باشد نقیض آن گزاره کوئیم. مثال 8: 5 عددی زوج است $\leftarrow$ این نقیض نیست که 5 عددی زوج است.

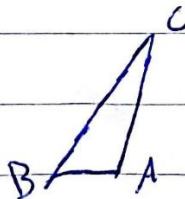
توجه! در صورت نوشتن هر گزاره با استفاده از یک مثال نقیضی همان نقیض را نوشت. برهان خلف 8: در این روش فرض می‌کنیم حکم نادرست است و نقیض آن درست می‌باشد و سپس از استنباطی یک تناقض با فرض مسئله یا یک عبارت غیر ممکن می‌رسیم که این نشان‌دهنده این است که خلاف حکم نادرست است (یعنی حکم درست است).

سپس از استنباطی یک تناقض با فرض مسئله یا یک عبارت غیر ممکن می‌رسیم که این نشان‌دهنده این است که خلاف حکم نادرست است (یعنی حکم درست است).

نقیده! اگر در مثالی دو زاویه نامبر باشد آنگاه ضلع روبرو به زاویه بزرگتر بزرگتر است از ضلع روبرو به زاویه کوچکتر.

$$\hat{A} > \hat{B} \quad \text{فرض}$$

$$BC > AC \quad \text{حکم}$$



ALYAZ

Subject:

Year:

Month:

Date:

اثبات ۵: فرض کنیم $AC > BC$ یا $BC = AC$ یعنی $BC \nless AC$ است.

اگر $BC = AC$ باشد $\triangle ABC$ متساوی الساقین است یعنی $\hat{A} = \hat{B}$ و این فرض فلو است.

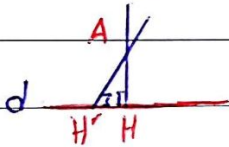
اگر $BC < AC$ باشد بنابر قضیه ۴، $\hat{A} < \hat{B}$ و این فرض خلف است.

یعنی فرض خلف نادرست است در نتیجه حکم $BC > AC$ درست می باشد.

$AC > BC$

درست

سوال ۶: از هر هال خلف ثابت کنید از یک نقطه غیر واقع بر یک خط نمی توان بیش از یک خط



خط l و نقطه A خارج آن فرض

بر آن عمود می کشیم از A فقط یک عمود می کشیم و حکم می شود.

اثبات ۶: فرض کنیم از نقطه A در خود بر l رسم می شود. (فرض خلف). در این حالت $AH'H$ یک مثلث خواهد بود که مجموع زوای داخلی آن از 180° درجه بیشتر است و این غیر ممکن است. پس از نقطه A فقط یک خط می توانیم رسم کرد.

مثال نقض ۶: به مثالی که کلیت درستی حکم را رد می کند.

مثال ۷: درستی یا نادرستی افکار زیر را مشخص کنید. در صورت نادرستی مثال نقض را

مستند کنید. الف) همی اعداد صحیح مثبت می باشند. غلط $\mathbb{Z} = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

ب) برای هر عدد طبیعی n عبارت $2^n + 1$ اول است. غلط $n=3$ $2^3 + 1 = 9$

ALYAZ

Subject:

Year:

Month:

Date:

• نالاس - تشابه دو ضلع • فصل دوم //

نسبت و تناسب • نسبت بین دو عدد A و B یعنی کسر $\frac{A}{B}$ • $b \neq 0$

تناسب یعنی به دو نسبت مساوی هم یک تناسب می‌دهیم یعنی اگر دو نسبت $\frac{A}{b}$ و $\frac{c}{d}$

متناسب باشند آنگاه $\frac{A}{b} = \frac{c}{d}$ است.

ویژگی های تناسب • الف) در هر تناسب حاصل ضرب جهات طرفین برابر حاصل

ضرب جهات وسطین است • $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftarrow a \cdot d = c \cdot b$

ب) در هر تناسب می‌توان نسبت را وارونه کرد • $\frac{4}{3} = \frac{12}{9} \rightarrow \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

ج) در هر تناسب می‌توان بای طرفین یا وسطین را عوض کرد • $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} \rightarrow \frac{10}{5} = \frac{4}{2}$

د) از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ تناسب های $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c}$ و $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ به دست می‌آید

ه) از تناسب های $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ تناسب های $\frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{c}$ و $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$

۱) از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ تناسب $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ به دست می‌آید مثال:

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \rightarrow \frac{1+2}{2+4} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

Subject:

Year:

Month:

Date:

واسط هندسی اگر بین سه عدد a, b, c تناسب $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ برقرار باشد

به عدد b واسط هندسی گویند $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \rightarrow b^2 = a \cdot c \rightarrow b = \sqrt{a \cdot c}$

مثال واسط هندسی بین $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ را حساب کنید $b = ?$
 $b = \sqrt{\sqrt{2} \times \sqrt{3}} = \sqrt{\sqrt{\frac{6}{2}}} = \sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3} = \sqrt{2} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

فصل دوم

قضیه تالس اگر خطی موازی یک ضلع مثلثی رسم شود و دو ضلع دیگر را قطع کند آنگاه نسبت

پاره قطعه‌های ایجاد شده روی یک ضلع با نسبت پاره قطعه‌های ایجاد شده روی ضلع دیگر برابر است.

فرض $EF \parallel BC$ نتایج تالس اثر در مثلث ABC $EF \parallel BC$ حکم $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$

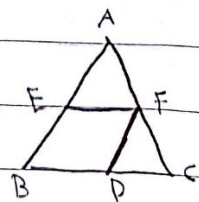
(۲) نتیجه $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$ تعمیم تالس

اثبات نتیجه یک تالس فرض $EF \parallel BC$ حکم $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$

اثبات $EF \parallel BC$ ترکیب درستی تالس $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \rightarrow \frac{AE}{AE+EB} = \frac{AF}{AF+FC} \rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$

اثبات نتیجه دو تالس فرض $EF \parallel BC$ حکم $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$

اثبات FD موازی AB رسم کنید



ALYAZ

Subject :

Year.

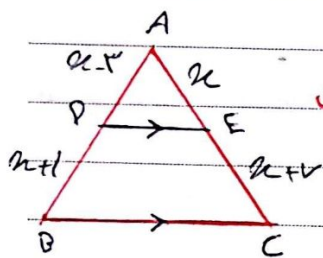
Month.

Date.

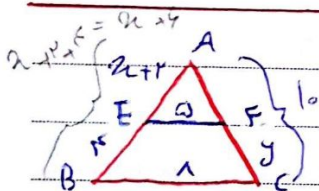
()

$EF \parallel BD$ } $\Rightarrow EFDB$ $\Rightarrow EF = BD, FD = EB$
 $FD \parallel EB$

$EF \parallel BD$ $\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$
 $FD \parallel EB$ $\Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{BD}{BC}$
 $\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$



در شکل زیر $DE \parallel BC$ است $\Rightarrow$ $AD = DB$ و $AE = EC$ (نصف)
 $\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ $\Rightarrow \frac{x-3}{x+1} = \frac{x}{x+7}$
 $(x-3)(x+7) = x(x+1)$
 $x^2 + 7x - 3x - 21 = x^2 + x$
 $4x - 21 = x$
 $3x = 21$
 $x = 7$



در شکل زیر $FE \parallel BC$ است $\Rightarrow$ $FE = BC$ و $AE = EC$ (نصف)

توجه: اگر روی ضلع‌های موازی مقدار باشد معمولاً از نتیجه (۵) استفاده

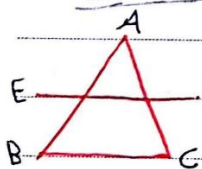
$EF \parallel BC$ $\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$
 $\frac{x+2}{x+6} = \frac{10-y}{10} = \frac{5}{1}$

$\frac{x+2}{x+6} = \frac{5}{1} \Rightarrow 1(x+2) = 5(x+6) \Rightarrow x+2 = 5x+30 \Rightarrow -4x = 28 \Rightarrow x = -7$

$\frac{10-y}{10} = \frac{5}{1} \Rightarrow 1(10-y) = 5 \Rightarrow 10-y = 5 \Rightarrow -y = -5 \Rightarrow y = 5$

$y = \frac{10}{2} = 5$

عکس قضیه تالس: اگر قطی دو ضلع متان را قطع کند و نسبت یا به فط‌های ایاد شده روی دو ضلع



$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$
 $\frac{y}{x+y} = \frac{x}{x+y}$

متناسب باشد آنگاه آن خط با ضلع سوم منبت برابر است $\Rightarrow EF \parallel BC$

اثبات: فرض کنیم $EF \parallel BC$ نباشد از نقطه E باره خط EF' موازی BC رسم کنیم

$EF' \parallel BC$ $\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF'}{AC}$

$EF \parallel BC$ $\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$

$\Rightarrow \frac{AF'}{AC} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow AF' = AF$

GRAPHIST

Subject :

Year. Month. Date. ()

یعنی F و F' روی هم منطبق هستند و چون EF' موازی BC است پس EF نیز موازی BC می باشد.

نکته: اگر در مسئله ای بخواهیم ثابت کنیم دو پاره برابر هستند یا پاره قطعی با یک ضلع مثلث موازی

است که از عکس قضیه تالس یا عکس قضیه خطوط موازی استفاده می شود.

تساوی مثلث 8: دو مثلث را متشابه گوئیم اگر زاویه های آنها در دو مساوی باشند و ضلع های متناظر

متناسب باشند.

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \begin{cases} A = A' \text{ و } B = B' \text{ و } C = C' \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k \end{cases}$$

نسبت تناسب k

قضیه اساسی تساوی 8: اگر خطی موازی ضلع مثلثی رسم شود و دو ضلع دیگر را قطع کند مثلث ایجاد شده با

مثلث اصلی متشابه است. $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ فرض: $EF \parallel BC$

$$\begin{aligned} EF \parallel BC &\Rightarrow \angle B = \angle E \quad (\text{مکمل } AB) \\ EF \parallel BC &\Rightarrow \angle C = \angle F \quad (\text{مکمل } AC) \end{aligned} \Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ABC$$

تقسیم تالس: $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$

حالات تساوی دو مثلث 8: هرگاه در زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر هم اندازه باشند، دو مثلث

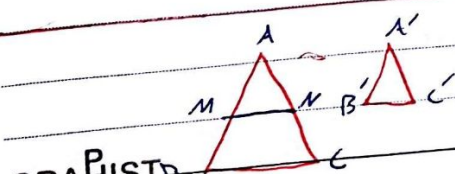
متشابه است. قضیه اول (تساوی در زاویه) فرض: $A = A'$ و $B = B'$ مکمل: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

اثبات 8: روی ضلع AB پاره نقطه M را مساوی AM را مساوی AC' در روی ضلع AC پاره نقطه N را مساوی AN را مساوی AB'

مبادی کنیم و مستقیم از M به N وصل می کنیم. می دانیم $B = B'$ و $M = B'$ و $N = C'$

$$\triangle AMN \sim \triangle A'B'C' \quad (\text{فرض}) \Rightarrow MN \parallel B'C' \text{ و } M = B' \text{ و } N = C'$$

عکس قضیه: $M = B' \text{ و } N = C' \Rightarrow MN \parallel B'C' \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC$ (تساوی)



GRAPHIST

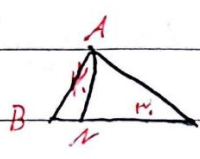
Subject:

Year:

Month:

Date:

در شکل زیر الف) ثابت کنید در مثلث متساوی الساقین (ب) نسبت تشابه آنها چند است



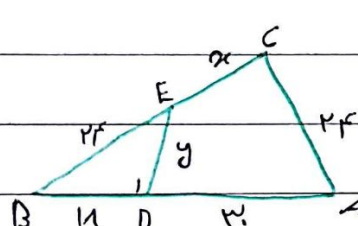
الف) $\triangle ABC = \triangle ABN$ (تساوی درزاویه)

ب) نسبت تشابه $\frac{AB}{BN} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{AB}$

مع افتاد باید تصمیم بگیریم نسبت کدام را با کدام را بگیریم

موضع هایی را صورت و وضع قرار می دهیم که رویی زاویه مساوی قرار دارند. در نسبت هم مشترک قرار می دهیم.

در شکل زیر $C = D_1$ است مقدار x و y را پیدا کنید



نسبت تشابه $\triangle ABC \sim \triangle BDE$ (تساوی درزاویه)

$B = B$ مشترک

$C = D_1$ قوفی

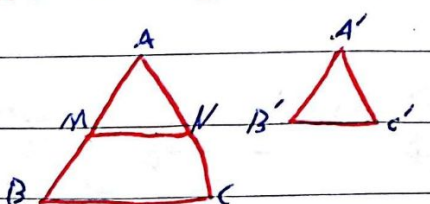
$$\text{نسبت تشابه} = \frac{AC}{DE} = \frac{AB}{BE} = \frac{BC}{DB} = \frac{24}{y} = \frac{41}{24} = \frac{24+x}{11}$$

$$\frac{24}{y} = \frac{41}{24} = \frac{24+x}{11} \Rightarrow \frac{24}{y} = \frac{41}{24} \Rightarrow y = \frac{24 \times 24}{41} = \frac{576}{41}$$

$$\frac{24}{y} = \frac{24+x}{11} \Rightarrow \frac{24}{\frac{576}{41}} = \frac{24+x}{11} \Rightarrow \frac{24 \times 41}{576} = \frac{24+x}{11} \Rightarrow \frac{984}{576} = \frac{24+x}{11} \Rightarrow \frac{13}{8} = \frac{24+x}{11} \Rightarrow 13 \times 11 = 8(24+x) \Rightarrow 143 = 192 + 8x \Rightarrow 8x = -49 \Rightarrow x = -\frac{49}{8}$$

تعیین دوم تشابه در مثلث ۸ اگر دو ضلع مثلثی با دو ضلع مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه بین

آنها در وضع در دو ضلع مساوی باشند آنگاه دو ضلع متناسب اند (تناسب دو ضلع و تساوی زاویه بین)



$A = A'$ و $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ ۸ قوفی

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ۸ قوفی

اثبات: روی ضلع AB باره خط AM را مساوی $A'D'$ و روی ضلع AC باره خط AN را مساوی $A'C'$ قرار

Subject: _____

Year: _____

Month: _____

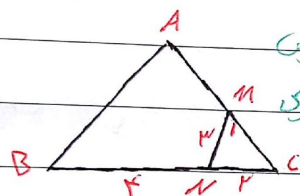
Date: _____

① $AMN \sim A'B'C'$ (فرضی) ① $\Rightarrow MN \parallel BC$ می‌کنیم و سپس از M به N وصل می‌کنیم.

$$\text{فرضی} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \quad \xrightarrow{\text{ثبات کسری}} \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} \quad \xrightarrow{\text{ثبات کسری}} MN \parallel BC$$

$$\text{ثبات قضیه اساسی} \quad AMN \sim ABC \quad \xrightarrow{\text{ثبات}} \quad ABC \sim A'B'C'$$

در شکل زیر $M_1 = B$ و M وسط AC است. طول اضلاع AB و AC را حساب کنید.



$\left. \begin{array}{l} M_1 = B \text{ فرض } \\ \angle C = \angle C \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MNC$ (ثباتی در ضلع)

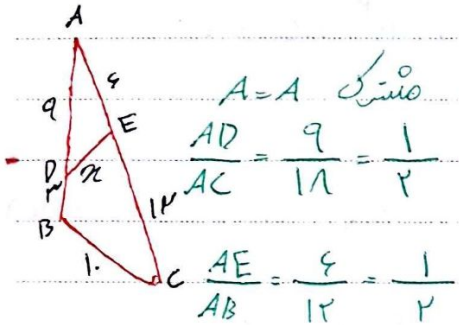
$$\frac{NC}{AC} = \frac{MN}{AB} = \frac{CM}{CB} \Rightarrow \frac{2}{AC} = \frac{3}{AB} = \frac{CM}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{AC} = \frac{\frac{AC}{2}}{4} \Rightarrow \frac{2}{AC} = \frac{AC}{8} \Rightarrow AC^2 = 16 \Rightarrow AC = 4$$

ALYAZ

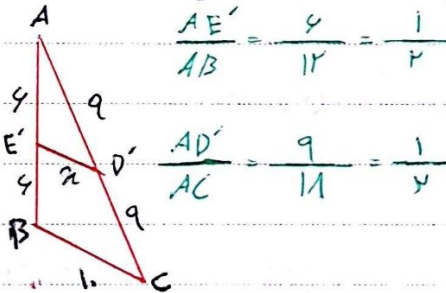
$$\frac{2}{AC} = \frac{3}{AB} \rightarrow \frac{2}{2\sqrt{6}} = \frac{3}{AB} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{3}{AB} \rightarrow AB = 3\sqrt{6}$$

در شکل زیر را حساب کنید.



(الف) تناسب دو ضلع
(نسبتی زوای بین و) $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE$

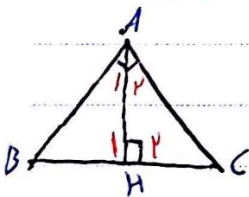
(ب) روی AC AD' و AB AE' نام اندازه AE جدا کنید و نشان دهید



$\frac{AE'}{AB} = \frac{AD'}{AC} \xrightarrow{\text{نسبتی}} D'E' \parallel BC$ است.

$$k = \frac{1}{2} \quad \frac{BC}{2} = DE' \quad \leftarrow E'D'$$

قضیه فیثاغورس و روابط طولی دیگر در مثلث قائم الزاویه... 8. اثر $\triangle ABC$ مثلث قائم الزاویه ای باشد که



در رأس A قائم باشد که AH ارتفاع دارد بر وتر آن باشد روابط زیر را داریم:

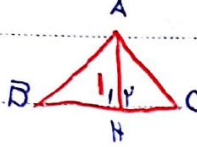
① $AB^2 = BC \cdot BH$ ② $AC^2 = BC \cdot CH$

③ $BC^2 = AB^2 + AC^2$ → فیثاغورس ④ $AH^2 = BH \cdot HC$

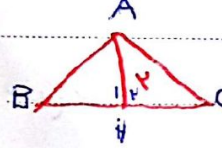
⑤ $AB \cdot AC = BC \cdot AH$

Subject :
Date :

اثبات رابطه شماره (۱) ۸
 $\left. \begin{array}{l} B = B \text{ مشترک} \\ 90^\circ H_1 = \hat{A} \end{array} \right\} \Rightarrow ABC \sim ABH \text{ (تساوی در زاویه)}$

نسبت تناسب $\rightarrow \frac{AC}{AH} = \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{HB} \Rightarrow AB^2 = BC \cdot BH$
 مثلث ۱ با کل شکل

اثبات رابطه شماره (۲) ۸
 $\left. \begin{array}{l} C = C \text{ مشترک} \\ 90^\circ A = H_2 \end{array} \right\} \Rightarrow ABC \sim ACH \text{ (تساوی در زاویه)}$

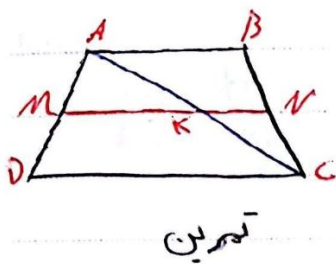
نسبت تناسب $\rightarrow \frac{AB}{AH} = \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{HC} \Rightarrow AC^2 = BC \cdot HC$
 مثلث ۲ با کل شکل

اثبات رابطه شماره (۳) (قضیه فیثاغورس) ۸
 $AB^2 + AC^2 = BC \cdot BH + BC \cdot HC = BC(BH + HC) = BC \cdot BC = BC^2$

$\left. \begin{array}{l} ABC \sim ABH \\ ABC \sim ACH \end{array} \right\} \Rightarrow ABH \sim ACH$

اثبات رابطه شماره (۴) ۸

$\left. \begin{array}{l} A_1 + B = 90^\circ \\ C + B = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow A_1 = C$ نسبت تناسب $\rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BH}{AH} = \frac{AH}{HC} \Rightarrow AH^2 = BH \cdot HC$



کلمه: $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$

ثبات ۳۷۵: $AD \parallel BC$ و $MN \parallel AD$ فرض

ثبات ۸: قطر AC را رسم کنید.
تالس: $\triangle ADC \text{ و } MK \parallel DC \Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{AK}{KC}$

تالس: $\triangle ABC \text{ و } NK \parallel AB \Rightarrow \frac{BN}{NC} = \frac{AK}{KC}$

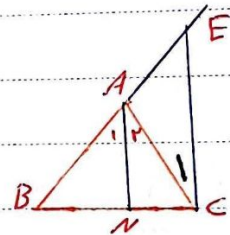
$\Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$

درس ۴: کاربرد های قضیه تالس و تناسب در مثلث

قضیه ۱: در مثلث هر نیم ساز زاویه داخلی خطی دو بر و را به نسبت دو ضلع زاویه تقسیم می کند.

فرض: $A_1 = A_2$ کلمه: $\frac{AB}{AC} = \frac{BN}{NC}$

اثبات: ابتدا $\angle E$ را موازی AN بر امتداد AB رسم می کنیم.



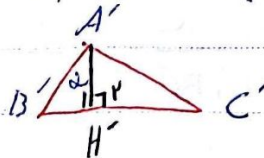
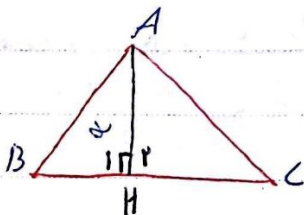
تالس: $AN \parallel CE \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BN}{NC}$ (۱)

تالس: $BE \parallel AN$ و $A_1 = E$ } فرض $E = C_1 \Rightarrow AE = AC$ (۲)
تالس: $AN \parallel CE$ و $A_2 = C_1$ } $A_1 = A_2$

$۱ و ۲ \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BN}{NC}$

قضیه دوم: در هر دو مثلث متشابه نسبت اجزای متناظر و نسبت

محیط ها برابر نسبت تناسب و نسبت مساحت ها برابر توان دوم نسبت تناسب است.



فرض: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

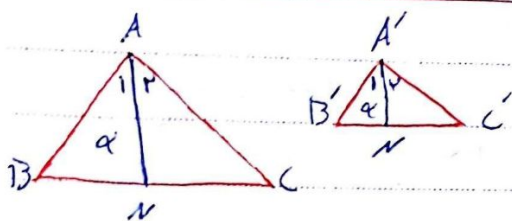
(یعنی ضلع ها متناسب و زاویه ها برابر است)
(الف) ارتفاع ها

کلمه: $\frac{AH}{A'H'} = k$

اثبات ۸

فرض $B = B'$
۹. $H_1 = H'_1$

$\Rightarrow \triangle ABH \sim \triangle A'B'H' \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AH}{A'H'} = \frac{BH}{B'H'} \Rightarrow \frac{AH}{A'H'} = k$



هات فرض قبلی = فرض

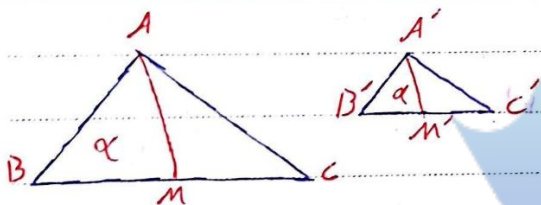
نیم سازها ۸

حکم ۸ $\frac{AN}{A'N'} = k$

فرض

اثبات ۸ k

$A_1 = A'_1$ $B = B'$ $\Rightarrow \triangle ABN \sim \triangle A'B'N'$ (تساوی دو زاویه) $\Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AN}{A'N'} = \frac{BN}{B'N'} = k$



قبلی = فرض

میانه ها ۸

حکم ۸ $\frac{AM}{A'M'} = k$

اثبات ۸

بناب فرض $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{\frac{BC}{2}}{\frac{B'C'}{2}} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BM}{B'M'}$

$\Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle A'B'M'$

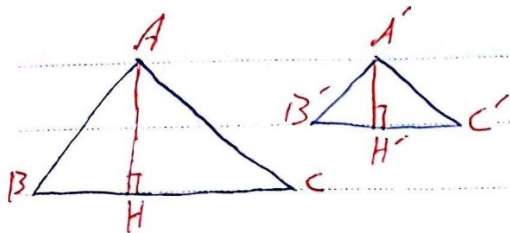
$B = B'$ $\Rightarrow$ تناسب دو ضلع و زاویه بین

$\Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AM}{A'M'} = \frac{BM}{B'M'} \Rightarrow \frac{AM}{A'M'} = k$

صیغه ۸ k

بناب فرض $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \frac{AB+AC+BC}{A'B'+A'C'+B'C'} = \frac{AB}{A'B'} \Rightarrow \frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = k$

فرض $\frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = k$



(ارتفاع AH)

نسبت 8. $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = K$

اثبات 8. $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} BC \times AH}{\frac{1}{2} B'C' \times A'H'} = \frac{BC}{B'C'} \times \frac{AH}{A'H'} = K \times K = K^2$

اگر دو ضلعی متشابه باشند و نسبت تشابه آنها K باشد، نسبت محیط‌های آن‌ها K و نسبت مساحت‌ها K^2 است.
هر دو n ضلعی منتظم همواره با هم متشابه هستند.

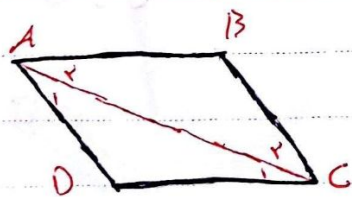
فصل ۳

چند ضلعی را مشخص کنید که تعداد قطرهای آن در برابر تعداد اضلاع آن باشد.

$$\frac{n(n-3)}{2} = 2n \rightarrow n^2 - 3n = 4n \rightarrow n^2 - 7n = 0 \rightarrow n^2 - 7n = 0$$

$n=0$ ❌

$n(n-3) = 0 \rightarrow n=3$ ✓



قضیه ۱) در هر متوازی‌الاضلاع زاویه‌های مقابل با هم برابرند:

$AD \parallel BC$ و $AB \parallel DC$ به فرض

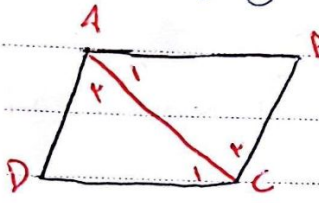
$A = C$ و $B = D$ به حکم

$AC = AC$

اثبات 8. قطر AC را رسم می‌کنیم. (زیرا) $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$ به فرض
 $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$ به فرض $A_1 = C_2$ و $A_2 = C_1$ به فرض $B = D$

$A_1 + A_2 = C_1 + C_2 \rightarrow A = C$

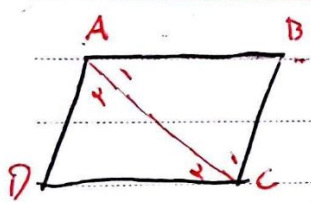
✓ **عکس قضیه ۱** اگر در یک چهارضلع زاویه های مقابل برابر باشند آنگاه آن چهارضلع متوازی الاضلاع است؟



A, C و B, D = ضلع
کلم: $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$

ابتدا قطر AC را رسم می کنیم.

$$\left. \begin{aligned} \angle 1 &= \angle 3 \\ \angle 2 &= \angle 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

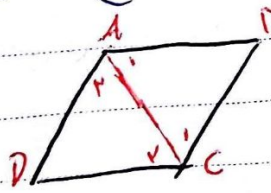


قضیه ۲ در هر متوازی الاضلاع ضلع های روبه رو مساوی اند.
کلم: $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$ = ضلع

کلم: $AB = DC$ و $AD = BC$

اثبات: AC قطر AC را رسم می کنیم.
 $AB \parallel DC$ مورب $AC \rightarrow \angle 1 = \angle 2$
 $AD \parallel BC$ مورب $AC \rightarrow \angle 3 = \angle 4$
 $AC = AC$ مشترک
 $\left. \begin{aligned} \angle 1 &= \angle 2 \\ \angle 3 &= \angle 4 \\ AC &= AC \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle ADC$ (زاویه زاویه)
 $\Rightarrow AB = DC$ و $AD = BC$

عکس قضیه ۲ اگر در یک چهارضلع ضلع های روبه رو برابر باشند آنگاه آن چهارضلع متوازی الاضلاع است.



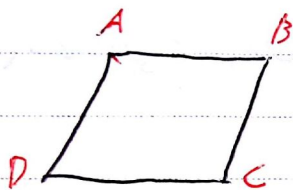
$AB = DC$ و $BC = AD$ = ضلع
کلم: $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$

اثبات:

$AB = DC$
 $AD = BC$
 $AC = AC$
 $\left. \begin{aligned} AB &= DC \\ AD &= BC \\ AC &= AC \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle ADC$ (ض ض ض) $\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$
 $\xrightarrow[\text{موازی}]{\text{عکس متوازی}} AB \parallel DC$
 $\angle 3 = \angle 4 \xrightarrow[\text{موازی}]{\text{عکس متوازی}} AD \parallel BC$

Subject: _____

Date _____



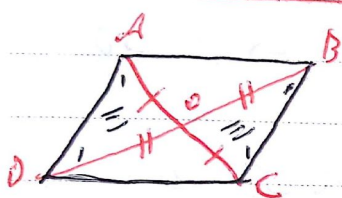
قضیه ۲۳ در هر متوازی الاضلاع هر دو زاویه مقابل برابر مکمل اند.
۲
فرضی: $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$

ملاحظه: $A + B = 180^\circ$, $D + C = 180^\circ$, $A + D = 180^\circ$, $B + C = 180^\circ$

$$\left. \begin{array}{l} A + B + C + D = 360^\circ \\ A = C \text{ و } B = D \text{ (فرضی ۱)} \end{array} \right\} A + A + B + B = 360^\circ$$

اثبات: دو کاهینست یکی را اثبات کنیم.

$$2A + 2B = 360^\circ \xrightarrow{\div 2} A + B = 180^\circ$$



قضیه ۴) در هر متوازی الاضلاع قطر ها منصف یکدیگر اند.

فرضی: $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$

کلم: $BO = OD$ و $AO = OC$

$\begin{aligned} & AC \text{ و } BD \text{ محور } O \text{ و } A \parallel C \Rightarrow A_1 = C_1 \\ & AD \parallel BC \Rightarrow D_1 = B_1 \end{aligned} \Rightarrow \triangle AOD \cong \triangle BOC \Rightarrow BO = OD, AO = OC$

قضیه قبل می دانیم $\rightarrow AD = BC$

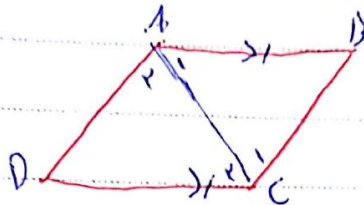
PAPCO

تقدیر (ی) چهار ضلعی که دو ضلع مقابل آن موازی و مساوی باشند (یا متوازی (یا متلاع است.

$$AB \parallel DC \quad \text{فرض}$$

$$(A_2 = C_1)$$

$$AD \parallel BC \quad \text{د کلم}$$



اثبات و قطر AC را رسم می کنیم

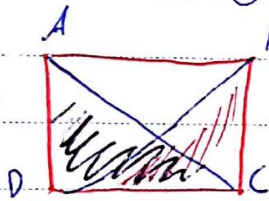
$$AB = DC \quad \text{فرض}$$

$$AC = AC \quad \text{مشترک}$$

$$AD \parallel BC \quad A_1 = C_2 \quad \text{موازی}$$

$$\left. \begin{array}{l} AB = DC \\ AC = AC \\ A_1 = C_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle ADC \quad \text{مقارنت حکم تساوی ضلع و تساوی زاویه بود از هم منتهی می شود} \Rightarrow A_2 = C_1 \quad \text{مساوی}$$

در هر مستطیل قطرها با هم مساوی اند.



$$A + B + C + D = 90^\circ \quad \text{فرض}$$

$$AD = BC$$

$$DC = DC$$

$$D = C = 90^\circ$$

$$AC = BD \quad \text{حکم}$$

$$\left. \begin{array}{l} AD = BC \\ DC = DC \\ D = C = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADC \cong \triangle BDC \Rightarrow AC = BD$$

سؤال: اگر دو قطر یک چهار ضلعی با هم مساوی باشند آیا می توان نتیجه گرفت آن مستطیل است؟ چرا؟

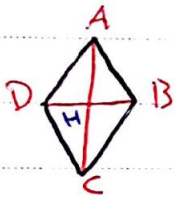
جواب: دو زوایای متساوی (مساوی) دو قطر با هم مساوی اند و مستطیل نیست.

مربع نوعی مستطیل است پس قطرهای آن هم برابرند.

Subject :

Date

دینتی (2) در هر لوزی قطرهای عمود منصف یک دینتی اند و قطرهای نیم سازهای زاویه های لوزی اند.



فرض $AB = BC = DC = AD$

نیم ساز $A_1 = A_2$ و عمودی $H_1 = H_2 = 90^\circ$ منصف $DH = HB$ و $AH = HC$ مکرر

اثبات 8 لوزی یک متوازی الاضلاع است پس قطرها دینتی منصف یکدیگر اند. (1)

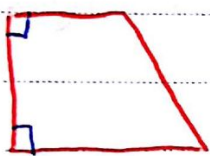
فرض $AD = AB$ مشترک $AH = AH$ منصف $DH = HB$

(2) $A_1 = A_2$ $H_1 = H_2 = 90^\circ$ $ADH \cong AHB$ (ض من ض) $\Rightarrow$

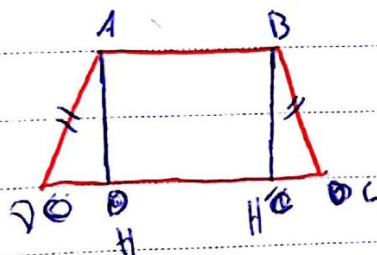
(29) ۳ قطرهای عمود منصف اند. ۳ قطرهای نیم سازند.

دورنقه: چهارضلعی که فقط دو ضلع آن موازی باشند گوئیم - ب دو ضلع موازی قائده ها و ب دو ضلع غیر موازی ساق ها گفته می شود.

دورنقه: متساوی الساقین: ب دورنقه ای که ساق های آن برابر مساوی باشند. دورنقه متساوی الساقین که بیس.



دورنقه قائم الزاویه: ب دورنقه ای که یکی از ساق های آن بر دو قائده عمود باشد.



$AB \parallel DC$ و $AD = BC$ (فوق)

$\angle A = \angle B$ یا $\angle D = \angle C$ کم

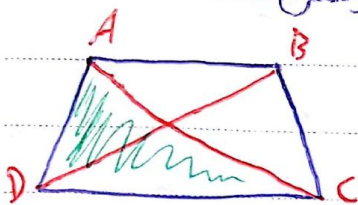
اثبات: در ارتفاع AH و BH' را رسم می کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} AD = BC \text{ (فوق)} \\ AH = BH' \text{ چارضلعی } ABH'A \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADH \cong \triangle BCH' \text{ (دو ضلع)} \Rightarrow D = C$$

مستطیل است

هر وقت نیمه های یک متوازی الاضلاع را رسم کنیم مستطیل بدست می آید و

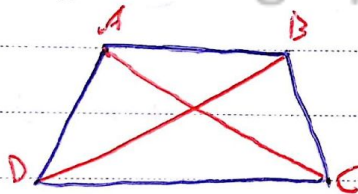
ویژگی ۲) در هر دو ضلع متساوی الساقین اندازه قعرها با هم برابر اند و برعکس.



$AD = BC$ (فروق) $AC = BD$ (مکم)

$AD = BC$ (فروق)
 $DC = DC$ (مشترک)
 $D = C$ (ویژگی ۱)
 $\Rightarrow \angle ADC = \angle BCD$ (فروق) $\therefore AC = BD$

اثبات برداشت



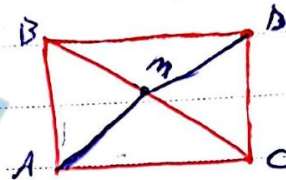
$AC = BD$ (فروق)

$AD = BC$ (مکم)

برگشت

Subject :
Date :

دریستی هم مثلث قائم الزامیه: در هر مثلث قائم الزامیه اندازه میانه دایره وتر نصف طول وتر است. $A = 90^\circ$ فرض



$$AM = \frac{BC}{2} \text{ حکم}$$

اثبات: AM را به اندازه خودش از نقطه M امتداد می دهیم تا نقطه D تا حاصل شود و سپس AD را به

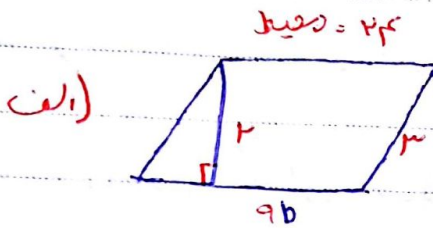
B و C وصل می کنیم. چون چهارضایی $ABDC$ قطرها همدیگر را نصف می کنند.

$$\left. \begin{array}{l} AD = BC \\ AD = 2AM \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2AM = BC \\ AM = \frac{BC}{2} \end{array}$$

$ABDC$ مستطیل است $\Rightarrow$ $\underline{AD = BC}$ متساوی اضلاع $A = 90^\circ$

توضیح این درس در پشته نمره

مساحت شکل های زیر را حساب کنید.

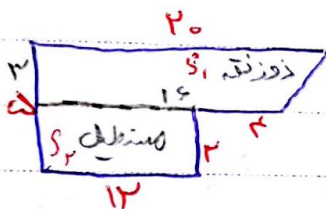


$$P = 2(2) + 2b$$

$$S = b \times h = 2 \times 9 = 18$$

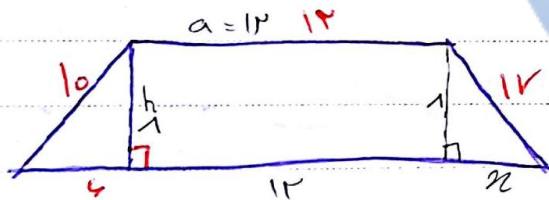
$$24 = 4 + 2b \rightarrow$$

$$\frac{11}{2} = 9$$



$$S_1 = \frac{(10+12) \times 2}{2} = 22$$

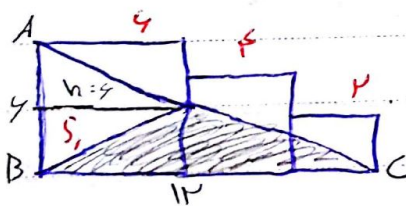
$$S = 2 \times 12 = 24 \rightarrow S = S_1 + S_2 = 22 + 2 = 24$$



$$10^2 = 6^2 + h^2 \rightarrow h^2 = 100 - 36 = 64 \rightarrow h = 8$$

$$12^2 = x^2 + 1^2 \rightarrow 144 = x^2 + 1 \rightarrow x^2 = 143 \rightarrow x = 11.9$$

$$S = \frac{(a+b)h}{2} = \frac{(10+12) \times 1}{2} = 11$$



مساحت قسمت های خورده را حساب کنید. (هر یک از اضلاع مربع هستند)

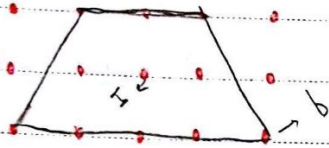
$$S_{ABC} = \frac{12 \times 6}{2} = 36$$

$$S_{ABC} - S_1 = 36 - 11 = 25$$

$$S_1 = \frac{4 \times 6}{2} = 12$$

$$= 11$$

نقاط شبکه ای ۸: به نقاطی که روی خط‌های افقی و عمودی قرار دارند و فاصله‌ی هر دو نقطه متوالی یک واحد می‌باشد را نقاط شبکه ای تقسیم.



چند ضلعی شبکه ای ۱: به چند ضلعی که تمام رئوس داخلی آن روی نقاط شبکه ای قرار داشته باشند و در هر ضلعی

شبکه ای به نقاطی از شبکه که روی اضلاع چند ضلعی قرار دارد، نقاط مرزی گفته می‌شود و با **b** نام آن‌ها را می‌نویسند.

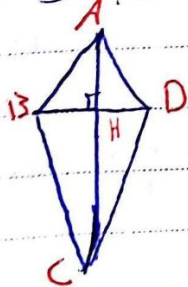
و نقاطی از شبکه که درون چند ضلعی قرار می‌گیرند نقاط درونی گفته می‌شود و با **I** نام آن‌ها را می‌نویسند.

مثلاً در چهار ضلعی شبکه ای ABCD داریم: $b = 1$ و $I = 3$

فرمول پیکت در مساحت: مساحت چند ضلعی‌های شبکه ای با b نقاط مرزی یک چند ضلعی باشند

و I نقاط درونی آن باشند مساحت چند ضلعی از راه زیر بدست می‌آید: $S = \frac{b}{2} - 1 + I$

نکته: در هر چهار ضلعی که قطرهای آن به هم برخورد داشته باشند برابر نسبت حاصل ضرب قطرهاست.



فرض: $AC \perp BD$

حکم: $\frac{AC \times BD}{2} = S$

مساحت کل: $S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{BD \times AH}{2} + \frac{BD \times CH}{2}$

$\frac{BD \times CH}{2} = \frac{BD}{2} (AH + CH) = 1$

کاربرد ها (مساحت):

شکل (۱): نشان دهد یک هیئت در دو ضلعی آن را به دو ضلعی با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کنند.

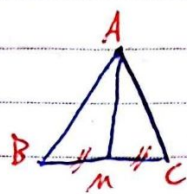
Subject :

Year.

Month.

Date.

()

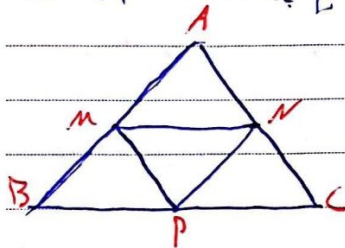


فرض : AM میانه $(BM = MC)$

حکم : $S_{ABM} = S_{ACM}$ ①

$$\frac{S_{ABM}}{S_{ACM}} = \frac{BM}{MC} \xrightarrow{\text{فرض}} \frac{BM}{BM} = 1 \rightarrow \frac{S_{ABM}}{S_{ACM}} = 1 \rightarrow \text{انتابت ①}$$

سوال ۸ نشان دهید هر دو خط وسط هر مثلث را به هم وصل کنیم با چهار مثلث هم نهشت



و در نتیجه با مساحت های مساوی ایجاد می شود.

وسط اضلاع M, N, P

فرض

①

مساحت های $\triangle AMN \sim \triangle MNP \sim \triangle NPC \sim \triangle MBP$ و $\triangle MBP \sim \triangle MNP$ حکم :

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = 1$$

نسبت ثابت

$MN \parallel BC$

همه همبست ترتیب می توان ثابت کرد

۲
 $MN \parallel BC$

$MNP \sim MBP$ چهار ضلعی MNP متوازی الاضلاع است.
 $NP \parallel AB$

و به همین ترتیب می توان ثابت کرد چهار مثلث با هم هم نهشتند.

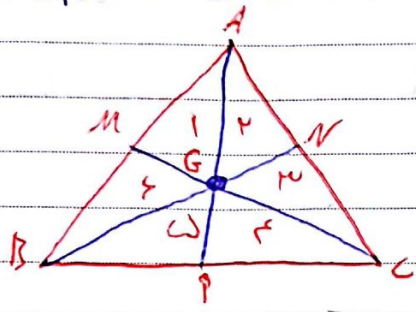
و داریم که هر دو مثلث هم نهشتند با مساحت های آنها برابر است

$$S_{AMN} = S_{NPC} : S_{MNP} = S_{MBP}$$

Subject :

Year. Month. Date. ()

سؤال ۳ - نشان دهید هر ضلع از آن سه ضلع با مساحت‌های مساوی تقسیم می‌گردد.



$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = S_7$$

اثبات ۱: $\triangle AGC = \triangle GBN \Rightarrow S_7 = S_3$ (۲)

اثبات ۲: $\triangle BGC = \triangle GCP \Rightarrow S_5 = S_4$ (۳)

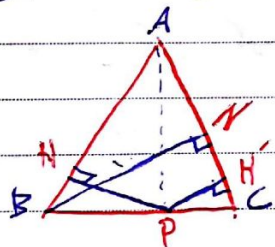
$\triangle AGB = \triangle GCM \Rightarrow S_1 = S_2$ (۱)

$$S_1 = S_2 + S_3 = S_4 + S_5 + S_6$$

$$S_1 = S_2 \Rightarrow S_1 = S_2$$
 (۴)

س (۱) (۲) (۳) (۴)

سؤال ۴ - ثابت کنید در هر مثلث متساوی الساقین مجموع فاصلاتی هر نقطه روی قاعده از رئوس پای



$$AB = AC \text{ - فرف}$$

$$PH + PH' = BN \text{ - فرف}$$

اثبات ۱: از A به P وصل می‌کنیم.

$$S_{ABC} = S_{APB} + S_{APC} \rightarrow \frac{AC \times BN}{2} = \frac{AB \times PH}{2} + \frac{AC \times PH'}{2}$$

$$\frac{AC}{2} (PH + PH') \rightarrow PH + PH' = BN$$

Subject :

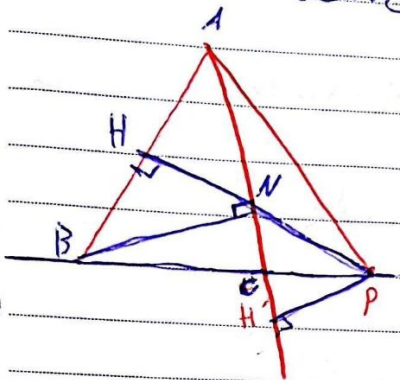
Year.

Month.

Date. ()

مسئله ۵) ثابت کنید در مثل متساوی الساقین، قاعده و ارتفاع و در مطلق تفاضل فاصله هر نقطه از

امتدادهای هر قاعده از دو ساق برابر اندازه ساق ارتفاع و در مطلق است.



فرض $AB = AC$

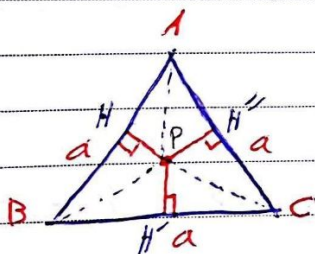
حکم $PH - PH' = BN$

اثبات: از A به P وصل می کنیم.

$$S_{ABC} = S_{ABP} - S_{ACP} \rightarrow \frac{AC \times BN}{2} = \frac{AB \times PH}{2} - \frac{AC \times PH'}{2}$$

$$\frac{AC \times BN}{2} = \frac{AC \times PH}{2} - \frac{AC \times PH'}{2} \rightarrow PH - PH' = BN$$

مسئله ۶) ثابت کنید مجموع فاصله هر نقطه درون مثل متساوی الساقین از سه ضلع برابر ارتفاع



فرض $AB = AC = BC = a$

حکم $PH + PH' + PH'' = \frac{\sqrt{3}}{2} a$

اثبات: از P به A و B و C وصل می کنیم.

$$S_{ABC} = S_{APB} + S_{APC} + S_{APB} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{a \times PH}{2} + \frac{a \times PH'}{2} + \frac{a \times PH''}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{a}{2} (PH + PH' + PH'') \rightarrow PH + PH' + PH'' = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

GRAPHIST

مثال ۸: اگر در یک مثلث متساوی الاضلاع فاصلی نقطه m درون مثلث از سه ضلع برابر ۲ و ۴ و ۶ باشد

اندازه‌ی ضلع مثلث و مساحت مثلث است. $PH = 2$, $PH' = 4$, $PH'' = 6$

$a = ?$ و $S = ?$ $PH + PH' + PH'' = \frac{\sqrt{3}}{2} a \rightarrow 2 + 4 + 6 = \frac{\sqrt{3}}{2} a \Rightarrow 12 = \frac{\sqrt{3}}{2} a$

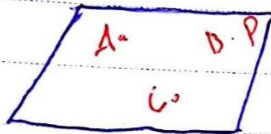
$\rightarrow \sqrt{3}a = 24 \Rightarrow a = \frac{24}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \rightarrow a = 1\sqrt{3}$ ضلع مثلث

$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4} (1\sqrt{3})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (3) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

PAPCO

فصل ۳ - تقسیم فضایی (هندسه فضایی)

خط و صفحه ۸



نمایش خط به ۲ نقطه نیازمند

نمایش صفحه به ۳ نقطه نیازمند

نکته ۸: از یک خط بی‌شمار صفحه تولید می‌شود. روی هر خط بی‌نهایت نقطه و روی هر صفحه بی‌نهایت خط وجود

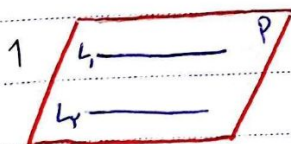
دارد. وضعیت دو در فضای

۱. موازی ۸ به دو خط که در یک صفحه باشند و هیچ نقطه مشترکی نداشته باشند ۶ دو خط موازی می‌گوئیم.

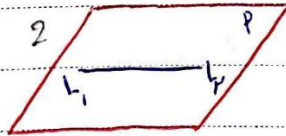
۲. منطبق ۸ به دو خط که در یک صفحه باشند و در بیش از یک نقطه مشترک هستند را دو خط منطبق می‌گوئیم.

۳. متقاطع ۸ به دو خط که در یک صفحه و در یک نقطه با هم مشترک اند را دو خط متقاطع می‌گوئیم.

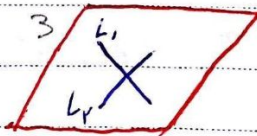
۴. متناظر ۸ به دو خط که در یک صفحه قرار نداشته باشند و دو خط متناظر می‌گوئیم.



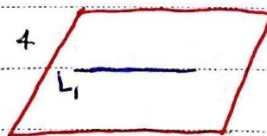
$L_1 \parallel L_2$



$L_1 = L_2$



$L_1 \cap L_2$



روی دیوار جلی است L_2

P = اسم صفحه

Subject: _____
Date: _____

وضعیت خط و صند در فضا

1. موازی: به خطی که با صند هیچ نقطه مشترکی نداشته باشند.

2. متقاطع: به خط و صند ای که در یک نقطه مشترک اند. خط و صند متقاطع می‌توند.

3. منطبق: به هر خط در روی صند که با صند در بیش از یک نقطه مشترک است.



وضعیت دو صند در فضا

1. موازی: به دو صند که هیچ نقطه مشترکی نداشته باشند و موازی می‌باشند.

2. متقاطع: به دو صند که در یک خط با هم مشترک اند. و به آن خط با هم مشترک دو صند گفته می‌شود.

